ECOLE POLYTECHNIQUE
CONCOURS 1975

OPTION : M'

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4h)

I

Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique (qui sera noté $\langle x, y \rangle$) et la norme euclidienne associée (qui sera notée $\|x\|$) .

Pour chaque couple d'entiers strictement positifs (p, q) on désigne par $M_{p,q}$ l'ensemble des matrices à coefficients réels, ayant p lignes et q colonnes. L'ensemble $M_{p,q}$ sera identifié , d'une part, à l'ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$ des applications linéaires de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$ et, d'autre part, à l'ensemble $\mathbb{R}^{pq}$.

$M_{p,q}$ est un espace vectoriel normé et l'on a pour tout élément $\mathcal{A} = [\alpha_{ij}]$ de $M_{p,q}$: $\| \mathcal{A} \| = \left(\sum_{i,j} \alpha_{ij}^2 \right)^{1/2}$.

Le produit des éléments $\mathcal{A}$ de $M_{p,q}$ et $\mathcal{B}$ de $M_{q,r}$ sera noté $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$. Enfin si E et F sont deux espaces de Banach et si une application $f : E \to F$ est différentiable en $x \in E$, on désigne par $f'(x)$ sa différentielle en ce point et on note $f'(x) \cdot h$ la valeur en h de cette différentielle.

1) Soit $(x_k)_{k \geqslant 0}$ une suite de vecteurs $x_k \in \mathbb{R}^n$, telle que la série numérique $\sum_{k=0}^{+\infty} \| x_k \|$ soit convergente. Démontrer que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ est convergente et que l'on a $\left\| \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \right\| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \| x_k \|$.

2) a) Pour $\mathfrak{A} \in M_{p,q}$ et $\mathfrak{B} \in M_{q,r}$, démontrer l'inégalité $\| \mathfrak{A} \circ \mathfrak{B} \| \leqslant \| \mathfrak{A} \| \| \mathfrak{B} \|$.

b) Soit k un entier strictement positif et soit $f_k : M_{n,n} \to M_{n,n}$ l'application définie par $f_k (X) = X^k$. Démontrer que f_2 est une application différentiable en tout point et que l'on a

$$f'_2 (X) \cdot h = X \circ h + h \circ X$$

Calculer $f'_k (X) \cdot h$ pour k quelconque, supérieur à 3 ($k \geqslant 3$) .

3) a) Soit $A : \mathbb{R}^n \to M_{p,q}$ une application différentiable. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $A (x) = [a_{ij} (x)]$. Montrer que pour chaque couple (i,j) , $(1 \leqslant i \leqslant p \ ; \ 1 \leqslant j \leqslant q)$, $a_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une application différentiable en tout point $x \in \mathbb{R}^n$.

Montrer que l'on a : $A' (x) \cdot h = [a'_{ij} (x) \cdot h]$.

b) On suppose que $p = q$ et l'on pose $g_k = f_k \circ A$ ($k \geqslant 1$).

Montrer que g_k est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $M_{p,p}$ différentiable en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ et déterminer $g'_k (x) \cdot h$.

4) Soit $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ ($a_k \in \mathbb{R}$) une série entière dont le rayon de convergence ρ est strictement positif et soit $Z : \mathbb{R}^n \to M_{p,p}$ une application telle que $Z (0) = 0$; on suppose, en outre, que Z est continue (resp. différentiable) . Démontrer qu'il existe un voisinage ouvert V de O dans $\mathbb{R}^n$ tel que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k . Z^k (x)$ soit convergente pour tout $x \in V$. Démontrer que sa somme S est continue (resp. différentiable) dans V.

Déduire de là, que, étant donnée une application $A : \mathbb{R}^n \to M_{p,p}$ continue (resp. différentiable) et telle que $A (0) = A_0$ soit inversible, il existe un voisinage ouvert W de O dans $\mathbb{R}^n$ et une application $B : W \to M_{p,p}$ continue (resp. différentiable) telle que pour tout $x \in W$, on ait $B^2 (x) = A_0^{-1} \circ A (x)$. (B sera définie par une série ; utilisez la série du binome).

Montrer que si, pour tout $x \in W$, $A (x)$ est symétrique , on a :

$${}^t B (x) \circ A_0 = A_0 \circ B (x) \qquad \text{et} \qquad {}^t B (x) \circ A_0 \circ B (x) = A (x)$$

où ${}^t B$ désigne la transposée de B.

L'objet de cette deuxième partie est l'étude de la notion de point critique non dégénéré d'une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Cette notion de point critique non dégénéré est définie dans la suite du texte.

1) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^r, $r \geqslant 2$.

On pose : $$a_{ij}(x) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} (s\,t\,x) \cdot t \; ds \; dt$$

(a_{ij} est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$) . On considère la matrice carrée d'ordre n, $A(x) = [\, a_{ij}(x) \,]$.

a) Expliciter $A_o = A(O)$.

b) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$f(x) = f(O) + \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} (tx) \cdot x_i \; dt .$$

et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = f(O) + f'(O) \cdot x + \langle A(x) \cdot x, x \rangle$.

2) On dit que $O \in \mathbb{R}^n$ est un point critique non dégénéré de f si les deux conditions suivantes sont réalisées : $f'(O) = O$ et $A_o = A(O)$ est une matrice inversible.

Démontrer qu'alors, il existe un voisinage ouvert U de O dans $\mathbb{R}^n$ et une application continue $B : U \to M_{n,n}$ telle que $B(O) = \Gamma$ (matrice unité de $M_{n,n}$) et que, pour tout $x \in U$, on ait .

$$f(x) - f(O) = \langle A_o \cdot y, y \rangle, \text{avec} \quad y = B(x) \cdot x$$

Si l'on suppose en outre $r \geqslant 3$, montrer que B est différentiable en tout point de U et que la relation $y = B(x) \cdot x$ définit, au voisinage de l'origine, un changement de variable .

Plus généralement, on note $H(x)$ la matrice d'éléments $h_{ij}(x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} (x)$ et l'on dit que x_o est un point critique non dégénéré de f si les deux conditions suivantes sont réalisées : $f'(x_o) = O$ et $H(x_o)$ est une matrice inversible.

Montrer que ce qui précède permet de prouver que pour $r \geqslant 3$, les points critiques non dégénérés de f sont isolés.

Montrer que ce résultat peut encore être acquis, sous la seule hypothèse $r \geqslant 2$, en appliquant le théorème des fonctions implicites à l'équation $y = f'(x)$.

III

L'objet de cette partie est de proposer des études de points critiques non dégénérés.

1) Adapter la définition des points critiques non dégénérés aux applications de R dans lui-même, deux fois dérivables.

On considère la fonction f définie de la façon suivante :

$$f(0) = 0 \ , \quad f(x) = x^4 \sin^2 \frac{1}{x} \quad \text{pour} \quad x \neq 0 \ .$$

Quels sont ses points critiques non dégénérés ?

2) Démontrer que pour toute application de R dans lui-même deux fois dérivable les points critiques non dégénérés sont nécessairement isolés.

3) On propose de construire une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ayant des dérivées partielles premières continues dans $\mathbb{R}^2$, des dérivées partielles secondes dans $\mathbb{R}^2$, continues dans le complémentaire de $O = (0,0)$ et telle, en outre, que O soit un point critique non dégénéré de f, mais non isolé.

Former à partir de la fonction polynomiale $\tau \to (1 - \tau^3)^3$ une application $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$, de classe C^2, possédant les propriétés suivantes :

$$\varphi(t) = 1 \text{ pour } |t| \leq 1 \quad \text{et} \quad \varphi(t) = 0 \text{ pour } |t| \geq 2 \ .$$

On définit alors, de la façon suivante une suite $(U_n)_{n \geq 0}$ d'applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} U_0(x,y) = 0 \quad \text{lorsque } xy = 0 \\ U_0(x,y) = xy \ \varphi \left\{ \inf \left(\left| \frac{4y}{x} \right| , \left| \frac{4x}{y} \right| \right) \right\} \text{ lorsque } xy \neq 0 \ ; \end{cases}$$

et pour $n \geq 1$:

$$U_n(x,y) = \frac{1}{2^n} \left(x - \frac{1}{n} \right) \left(y - \frac{1}{n} \right) \varphi \left\{ 2^{4+n} \left[\left(x - \frac{1}{n} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{n} \right)^2 \right] \right\} .$$

Préciser (et représenter sur une figure) les parties du plan $\mathbb{R}^2$ dans lesquelles les fonctions U_n ($n \geq 0$) prennent des valeurs non nulles.

Montrer que la série de terme général $U_n(x,y)$ est convergente et que si l'on désigne sa somme par $f(x,y)$, l'application f est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Montrer que (0,0) est un point critique non dégénéré de f et qu'il n'est pas isolé.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail